**4.1 随机变量的期望** 2020年2月25日09点30分

**例题4.1.1** 股票的公平价格

**例题4.1.2** 股票价格变化 **例题4.1.1**的解

**定义4.1.1 有界离散随机变量的均值** 设是一个有界离散随机变量,其p.f.为.的期望,标记未,定义如下:

的期望也被称为的均值[mean]或的期望值.

**例题4.1.3** 伯努利随机变量

**定义4.1.2 一般随机变量的均值** 设是一个一般离散随机变量,其p.f.为.假设下列表达式至少有一个是有限的:

则的均值或期望存在,定义如下

如果中的两个和式都是无限的,则不存在.

如果中的两个和都是无限大,则期望不存在的原因是,在这种情况下中的和没有得到很好的定义.从微积分可以知道,正负项都加到无穷大的无穷级数之和要么不能收敛,要么以不同顺序重新排列这些项来使其收敛到许多不同的值.我们不希望期望值的含义取决于加号顺序的任意选择.如果在中两个和只有一个是无限的,则期望值也是无限的,其符号与无限的和相同.如果两个总和都是有限的,则只有中的总和收敛,并且不依赖于项相加的顺序.

**例题4.1.4** 随机变量期望不存在的示例

**例题4.1.5** 随机变量期望是无穷的示例

**定义4.1.3 有界连续随机变量均值** 设是一个有界连续随机变量,其p.d.f.为.的期望标记为,定义为:

的期望也被称为的均值或的期望值.

**例题4.1.6** 预期故障时间

**定义4.1.4 一般有界连续随机变量均值** 设是一个一般有界连续随机变量,其p.d.f.为.假设下列积分至少有一个是有限的:

则的均值或期望存在,定义如下

如果中的两个积分都是无限的,则不存在.

**例题4.1.7** 保修期时长

**例题4.1.8** 连续分布均值不存在 柯西分布

**均值与重心的关系**:对随机变量的期望或等效地,对其分布的均值可以视为该分布的重心.

**例题4.1.9** 柯西分布 柯西分布在原点对称,但是期望不存在

**例题4.1.10** 故障率和故障时间

**例题4.1.11** 故障率和故障时间 **例题4.1.10**的解 根据随机变量函数求解

**定理4.1.1 佚名统计学家定理(Law of unconscious statistician)** 设是一个随机变量,设是一个实变量的实函数.如果是连续分布并且均值存在,则

如果是离散分布且均值存在,则

**例题4.1.12** 故障率和故障时间 **例题4.1.10**的解 根据**定理4.1.1**求解

**例题4.1.13** 随机变量函数的期望 **例题4.1.6**的扩展

**例题4.1.14** 期权价格 涉及一些经济学知识

**例题4.1.15** 两个随机变量的期望

**定理4.1.2 佚名统计学家定理(Law of unconscious statistician)** 假设是随机变量,其联合p.d.f.为.设是个实变量的实值函数,假设.则从下列关系中可以直接得出

如果均值存在.相似地,如果具有离散联合分布,其p.f.为并且存在均值,则的均值为

**例题4.1.15** 确定多变量随机函数的期望值 **定理4.1.2**的示例 均匀分布

4.2 期望的属性 2020年2月25日11点11分

**定理4.2.1 线性函数** 如果,其中和都是有限常数,则

**例题4.2.2** 计算线性函数的期望

**推论 4.2.1** 如果且概率为1,则.

**例题4.2.3** 投资 依赖**例题3.3.7**

**定理4.2.2** 如果存在一个常数使得,则.如果存在一个常数使得,则.

根据定理4.2.2得到如果,则.

**定理4.2.3** 假设,并且或.则**该定理的证明有点难,尤其是连续分布的证明需要注意**.

**定理4.2.4** 如果设是个随机变量且每一个期望是有限的(),则

**推论4.2.2** 假设期望是有限的().对所有常数和b存在下列关系:

**例题4.2.3** 投资组合 **例题4.2.1**的扩展

**例题4.2.4** 不放回抽样 该例题比较**古怪**

**定义4.2.1** **凸函数** 一个以向量为参数的函数是凸的,如果对于每一个,和每一个，,满足下列不等式

**定理4.2.5 Jensen不等式** 设是一个凸函数,设是一个有限均值的随机变量.则

**例题4.2.5** 放回抽样 **例题4.2.4**的扩展,两者期望相同,概率不同 二项分布

**例题4.2.6** 匹配的期望数值 **例题1.10.X**的新解 伯努利分布 **值得深度思考**

**定理4.2.6** 如果是个独立随机变量且每一个期望是有限的(),则

**证明过程需要看懂**.

**例题4.2.7** 计算随机变量组合的期望 **定理4.2.4**和**定理4.2.6**的示例

**例题4.2.8** 重复过滤 独立随机变量

**定理4.2.7 整型随机变量** 设是随机变量只能取值则

**证明过程非常有趣**.

**例题4.2.9** 期望的实验数 **定理4.2.7**的示例 实验直到成功的期望

**定理4.2.8 一般非负随机变量** 设是一个非负随机变量,其c.d.f.为.则

**例题4.2.9** 期望等待时间 **定理4.2.8**的示例 频率分布